28.03.16

Άσκηση 25 / σελ. 359: Αν E είναι ένας μ.χ. $a\in E$ και $r>0$, να αποδείξετε ότι για τυχόν $x\in E$ ισχύει

$$x\notin B(a,r) \Rightarrow \rho(x, B(a,r)) \geq \rho(a,x)-r$$

Λύση

$x\notin B(a,r) \Rightarrow \rho(x,a)\geq r \Rightarrow \rho(x,a)-r\geq 0$

$$\rho(x, B(a,r)) = \inf_{y\in B(a,r)} \rho(x,y)$$

Έστω $y\in B(a,r) \Rightarrow \rho(y,a)<r$ (1)

$$\rho(x,a) \leq \rho(x,y)+\rho(y,a) \overset{(1)}{<} \rho(x,y)+r \Rightarrow \rho(x,y) > \underbrace{\rho(x,a)-r}_{\text{κ.φ.}}$$

άρα $\inf\limits_{y\in B(a,r)} \rho(x,y) \geq \rho(x,a)-r$.

Άσκηση 28 / σελ. 360: Ας είναι A, B υποσύνολα ενός μ.χ. E τ.ω. το B να είναι ανοιχτό και επιπλέον $\bar{A}=E=\bar{B}$. Ν' αποδειχθεί ότι $\overline{A\cap B}=E$.

Λύση

Γενικά: (το γνωρίζουμε από το μάθημα)

- A πυκνό υποσύνολο του E $\Leftrightarrow \bar{A}=E$
- A πυκνό υποσύνολο του E, αν και μόνο αν, για κάθε μη-κενό και ανοιχτό υποσύνολο X του E ισχύει $A\cap X\neq\emptyset$ (αντίστοιχα $B\cap X\neq\emptyset$)

Αρκεί ν.δ.ο. $A\cap B$ πυκνό υποσύνολο του E.

Έστω $X\neq\emptyset$ και X ανοιχτό υποσύνολο του E.

Θ.δ.ο. $(A\cap B)\cap X\neq\emptyset$

$(A\cap B)\cap X = A\cap(B\cap X)$

Από υπόθεση $\bar{B}=E \Rightarrow B$ πυκνό υποσύνολο του E
$X\neq\emptyset$ και X ανοιχτό
$\Bigg\} \Rightarrow B\cap X\neq\emptyset$, (*)

Από υπόθεση B ανοιχτό, X ανοιχτό $\Big\} \Rightarrow B \cap X$ ανοιχτό, (*)(*)

Από υπόθεση $\bar{A} = E \Rightarrow A$ πυκνό υποσύνολο του E, (*)(*)(*)

άρα από $\underbrace{(*), (*)(*), (*)(*)(*)}$ $\Rightarrow A \cap (B \cap X) \neq \emptyset$

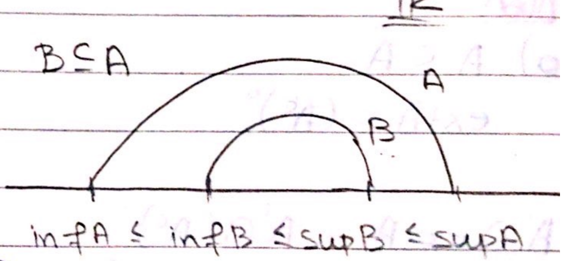
δηλ. δεύτερη βουλίτσα από "γενικά" $\Rightarrow (A \cap B) \cap X \neq \emptyset$

Άρα: $A \cap B$ πυκνό υποσύνολο του $E \Rightarrow \overline{A \cap B} = E$

Άσκηση 38 (σελ. 366): Αν A, B είναι μη κενά υποσύνολα ενός μ.χ. να αποδειχθεί ότι: $\rho(\bar{A}, B) = \rho(A, \bar{B}) = \rho(\bar{A}, \bar{B}) = \rho(A, B)$.

Λύση

Αρκεί ν.δ.ο $\rho(\bar{A}, B) = \rho(A, B)$



$A \subseteq \bar{A} \Rightarrow \rho(\bar{A}, B) \leq \rho(A, B)$

άρα αρκεί ν.δ.ο. $\rho(A, B) \leq \rho(\bar{A}, B)$

$\rho(\bar{A}, B) = \inf_{(x,y) \in \bar{A} \times B} \rho(x,y) \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists (x,y) \in \bar{A} \times B): \rho(x,y) < \rho(\bar{A}, B) + \frac{\varepsilon}{2}$, (1)

απλή συνεπαγωγή γιατί δεν είναι ο ολοκληρωμένος ορισμός του infimum.

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow (\forall r > 0)\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow (\forall r > 0)(\exists x_1)\ x_1 \in B(x,r) \cap A$

$\Leftrightarrow (\forall r > 0)(\exists x_1)\ x_1 \in B(x,r) \wedge x_1 \in A$ (SOS!)

$\Leftrightarrow (\forall r > 0)(\exists x_1 \in A)\ \rho(x_1, x) < \underset{\frac{\varepsilon}{2}}{\overset{\shortparallel}{r}}$, (2)

(μπορούσαμε εξαρχής $\forall \varepsilon$ αντί $\forall r$) και τα δύο τυχόντα > 0, μπορώ να θέσω $r = \varepsilon$ και να πάρω και $\frac{\varepsilon}{2}$ για πιο όμορφο αποτέλεσμα

Έχουμε: $x_1 \in A$, $x \in \bar{A}$, $y \in B$

→ παρεμβάλλω το x

$\underbrace{\rho(A,B) \leq \rho(x_1, y)} \leq \rho(x_1, x) + \rho(x, y) \underset{(2)}{\overset{(1)}{<}} \frac{\varepsilon}{2} + \rho(\bar{A}, B) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon + \rho(\bar{A}, B)$

αφού αυτό είναι το inf των

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ \rho(A,B) \leq \varepsilon + \rho(\bar{A}, B) \Rightarrow \rho(A,B) \leq \rho(\bar{A}, B)$

Άρα τελικά: $\rho(\bar{A}, B) = \rho(A, B)$

Τώρα, εφόσον ισχύει $\rho(\bar{A},B)=\rho(A,B)$ οι άλλες ιδιότητες προκύπτουν πολύ εύκολα.

$$\overbrace{\rho(\bar{A},B)=\rho(A,B)}^{\text{αυτήν αποδείξαμε}} \quad , (3)$$

$$\rho(B,\bar{A})=\rho(B,A)$$

$$\rho(A,B)\overset{(3)}{=}\rho(\bar{A},B)\underset{\text{συμμετρία}}{=}\underbrace{\rho(B,\bar{A})\overset{(3)}{=}\rho(\bar{B},\bar{A})}_{\text{το βλέπω ως χωρίς θήτα, και σύμφωνα με την (3) θα μπει θήτα στο πρώτο}}\overset{\text{συμμετρία}}{=}\rho(\bar{A},\bar{B})$$

Άσκηση 46 / σελ. 374: Αν A τυχόν υποσύνολο ενός μ.χ. ν.δ.ο.

α) $A' \cap \text{ext}A=\emptyset$

β) $(\partial A)^\circ=\emptyset \iff (\bar{A})^\circ \subseteq \overline{(A^\circ)}$

Λύση

α) $A' \subseteq \bar{A}$

$\text{ext}A=(A^c)^\circ$

$$A' \cap \text{ext}A = A' \cap (A^c)^\circ$$
$$= A' \cap (\bar{A})^c$$
$$\subseteq \bar{A} \cap (\bar{A})^c=\emptyset \quad \Rightarrow \quad A' \cap \text{ext}A=\emptyset$$

β) (την επόμενη φορά)

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \rho(x, A) = 0$, $\delta(A) = \delta(\bar{A})$

$\rho(x, A) = \rho(x, \bar{A})$, $x \in E$

Απόδειξη

(Το $\mathbb{N}$ δεν έχει εσωτερικό σημείο, δηλ $\mathbb{N}^\circ = \varnothing$, αφού $\nexists$ διάστημα (πχ μια περιοχή του 2) που να είναι υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Ομοίως για το $\mathbb{Z}$)

$x \in A$: $\rho(x, A) \geq \rho(x, \bar{A})$

$\{\rho(x,y) : y \in A\} \subseteq \{\rho(x,y) : y \in \bar{A}\}$

$\Rightarrow \inf\limits_{y \in A} \{\rho(x,y) : y \in A\} \geq \inf\limits_{y \in \bar{A}} \{\rho(x,y) : y \in \bar{A}\}$

Γενικά: $X \subseteq Y \Rightarrow \inf X \ ? \ \inf Y$

$x \in X \Rightarrow x \in Y \Rightarrow x \geq \inf Y \Rightarrow \boxed{\inf X \geq \inf Y}$

$\Rightarrow \rho(x, A) \geq \rho(x, \bar{A})$

Θ.δ.ο. $\rho(x, A) \leq \rho(x, \bar{A})$

Θεωρώ $\varepsilon > 0$, και x τυχόν , $x \in E$
Τότε $\exists y \in \bar{A}$: $\rho(x,y) \leq \rho(x, \bar{A}) + \frac{\varepsilon}{2}$, $(*)$

$y \in \bar{A}$: $B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow (\exists y_1 \in A) \ \rho(y, y_1) < \frac{\varepsilon}{2}$

Είναι: $\rho(x, A) \leq \rho(x, y_1) \leq \rho(x,y) + \rho(y, y_1) < \rho(x, \bar{A}) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow 0 \leq \rho(x, A) \leq \rho(x, \bar{A}) + \varepsilon$ (παίρνω ως $\varepsilon = \frac{1}{4}$ και παίρνω τα όρια)

$\Rightarrow \rho(x, A) \leq \rho(x, \bar{A})$

$\underline{\Delta}$ Θ'αποδείξαμε την (*):

$(\forall y \in \bar{A})\ \rho(x,y) > \rho(x,\bar{A}) + \frac{\varepsilon}{2}$

$\inf \rho(x,y) \geq \rho(x,\bar{A}) + \frac{\varepsilon}{2}$

αν $\rho(x,\bar{A}) \geq \rho(x,\bar{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} \leq 0$ ↯

Είχαμε δει: (E,ρ) $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $\ell \in E$. Τότε:
$\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = \ell \Leftrightarrow (\forall U(\ell))\ a_\nu \in U(\ell)$ τελικά

Επίσης, ℓ σ.σ. της ακολουθίας $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$
$\overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow} \exists$ υπακολουθία $(\beta_\mu)_{\mu\in M}$ της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με $\lim\limits_{\mu\in M} \beta_\mu = \ell$

$(\beta_\mu)_{\mu\in M} \leftrightarrow (a_{k_\mu})_{\mu\in M}$

Το σσ. και το όριο είναι συγγενείς έννοιες.
δηλ. το όριο είναι σ.σ ($\not\Leftarrow$)

π.χ

$$a_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\nu}, & \nu \in \mathbb{N}_0 \\ \frac{2\nu+1}{\nu+1}, & \nu \in \mathbb{N}_n \end{cases}$$

αυτή έχει δύο σ.σ
όμως $\nexists \lim$

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθία σε E. Τότε
ℓ σ.σ. της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow (\forall U(\ell))\ a_\nu \in U(\ell)$ για άπειρο πλήθος δεικτών $\nu\in\mathbb{N}$

Η πρόταση με το τελικά είναι πιο ισχυρή!
τελικά $\Rightarrow$ άπειρους
$\not\Leftarrow$

Απόδειξη

($\Longrightarrow$)

Έστω ℓ σ.σ. της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $U(\ell)$ τυχαία περιοχή του ℓ

$\exists\ (a_{k_\mu})_{\mu\in\mathbb{N}}$ της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με $\lim\limits_{\mu\in\mathbb{N}} a_{k_\mu} = \ell$. Τότε:

$a_{k_\mu} \in U(\ell)$ τελικά για όλα τα $\mu\in\mathbb{N}$

το $\mu > \nu_0$ σταθερό, δηλ. δεν είναι έτσι για όλους τους όρους

$\Rightarrow a_\nu \in U(\ell)$ για άπειρα $\nu\in\mathbb{N}$

δηλ. γι' αυτά που πιάνει το k_μ

για τα άλλα δεν μπορώ να πω κάτι, γι' αυτό

και λέω άπειρα και όχι τελικά.

($\Longleftarrow$)

Έστω $(\forall U(\ell))\ a_\nu \in U(\ell)$ για άπειρα $\nu\in\mathbb{N}$.

Θεωρώ τη σφαίρα $B\left(\ell, \frac{1}{1}\right)$: $a_\nu \in B\left(\ell, \frac{1}{1}\right)$ για άπειρα $\nu\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow (\exists n_1 \in\mathbb{N})\ a_{n_1} \in B\left(\ell, \frac{1}{1}\right)$

Θεωρώ τη σφαίρα $B\left(\ell, \frac{1}{2}\right)$: $a_\nu \in B\left(\ell, \frac{1}{2}\right)$ για άπειρα $\nu\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow (\exists n_2 \in\mathbb{N})\ a_{n_2} \in B\left(\ell, \frac{1}{2}\right)$

$\vdots$

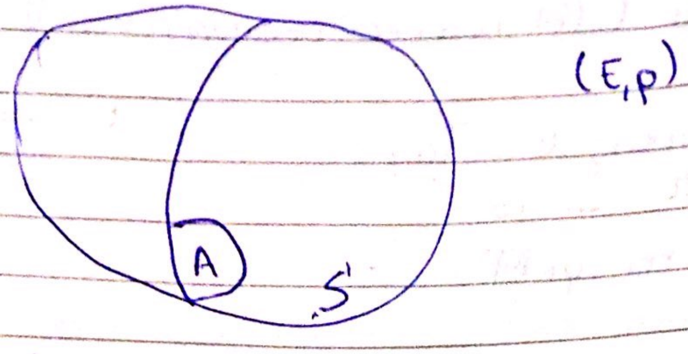
Θεωρώ τη σφαίρα $B\left(\ell, \frac{1}{\nu}\right)$: $a_\nu \in B\left(\ell, \frac{1}{\nu}\right)$ για άπειρα $\nu\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow (\exists n_\nu \in\mathbb{N})\ a_{n_\nu} \in B\left(\ell, \frac{1}{\nu}\right)$

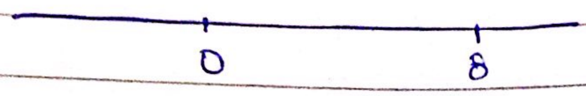
έτσι έφτιαξα μια ακολουθία $(a_{n_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$: $0 \leq \rho(\ell, a_{n_\nu}) < \frac{1}{\nu}$

παίρνω τα όρια κι έχω το ζητούμενο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο



$(\mathbb{R}, |\cdot|)$



$\big((0,8], |\cdot|\big)$ $\quad (7,8] \subseteq (0,8]$

Στον μεγάλο χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ δεν είναι ανοιχτό
<u>ενώ</u> στον μικρό χώρο;
Είναι ανοιχτό ή όχι;
(Θα δούμε τη θεωρία και μετά θα δώσουμε την απάντηση)

(E,ρ) π.χ. $S \subseteq E$, $a \in S$, $r>0$ $\quad$ (S : υπόχωρος)

Θα τον λέμε μετρικό υπόχωρο

$B_E(a,r) = \{x \in E : \rho(x,a) < r\}$

$B_S(a,r) = \{x \in S : \rho_S(x,a) < r\}$
$= \{x \in S : \rho(x,a) < r\}$ αφού $\rho_S(x,a) = \rho(x,a)$

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $A \subseteq S\ (\subseteq E)$. Τότε:
A ανοιχτό εν $S \iff \begin{cases} \exists\, B \text{ ανοιχτό εν } E: \\ A = S \cap B \end{cases}$

δηλ. το $(7,8] = \overset{S}{(0,8]} \cap \underbrace{(7,9)}_{\text{ανοιχτό του μεγάλου}}$ άρα είναι ανοιχτό στον υπόχωρο

Απόδειξη
($\Longrightarrow$)
Έστω A ανοιχτό εν S και α τυχόν, $a \in A$. Τότε
$(\exists r>0)\ B_S(a,r) \subseteq A \Rightarrow (\exists r>0)\ S \cap B(a,r) \subseteq A$ Είναι: $B_S(a,r) = B(a,r) \cap S$

αφού όλα υποσύνολο, τότε θα είναι και η ένωσή τους

άρα $\bigcup_{a \in A} (S \cap B(a,r)) \subseteq A$

και κάθε $a \in A$ θα είναι ένα από τα, άρα $A \subseteq \bigcup_{a \in A} (S \cap B(a,r))$

Επομένως, $\bigcup_{a \in A} (S \cap B(a,r)) = A$

ιδιότητες τομής και ένωσης συνόλων $\Leftrightarrow$ $S \cap \left(\bigcup_{a \in A} B(a,r) \right) = A$

$\Rightarrow$ B ανοιχτό εν E ? Ισχύει το αντίστροφο αυτής της σχέσης ?

H/W:
Άσκηση: Ν.δ.ο. τυχόν ανοιχτό σύνολο σ' ένα μ.χ. E μπορεί να γραφεί ως ένωση σφαιρικών περιοχών (δηλ. αυτό) ?
υπάρχει στις ασκήσεις του Βιβλίου

(Συνεχίζουμε με το άλλο μέρος της απόδειξης)
($\Longleftarrow$)
Έστω $(\exists B$ ανοιχτό εν $E)$: $A = S \cap B$.
Θ.δ.ο. A ανοιχτό εν S.

Έστω $a \in A \subseteq S \Rightarrow a \in S \cap B$
$\Rightarrow a \in S \wedge a \in B$ αυτή λογίζεται ως σφαίρα του μεγάλου χώρου
$\xRightarrow{B \text{ ανοιχτό εν } E} a \in S \wedge (\exists \varepsilon>0)\ B(a,r) \subseteq B$

Παίρνουμε τώρα την, $B_S(a,r) = B(a,r) \cap S \subseteq B \cap S \overset{*}{=} A$
και B_S είναι περιοχή του a εν S $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ A ανοιχτό εν S

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $S \subseteq E$ και $A \subseteq S$. Τότε:

A κλειστό εν $S \iff \begin{cases} \exists K \text{ κλειστό εν } E: \\ A = S \cap K \end{cases}$

Απόδειξη

($\Longrightarrow$)

$A \subseteq S \subseteq E$, A κλειστό εν $S \Rightarrow S - A$ ανοιχτό εν S

από προηγούμενη πρόταση $\Rightarrow S - A = S \cap B$ όπου B ανοιχτό εν E

$$\begin{aligned} S-(S-A) &= S-(S\cap B) \\ &= S\cap(S\cap B)^c \\ &= S\cap(S^c \cup B^c) \\ &= (S\cap S)^c \cup (S\cap B^c) \\ &= \phi \cup (S\cap B^c) \\ &= S\cap B^c \end{aligned}$$

και

$S-(S-A) = A$ (ιδιότητες συνόλων)

άρα $A = S\cap B^c$ όπου B^c κλειστό (αφού B ανοιχτό)

($\Longleftarrow$)

Έστω ισχύει: ($\exists K$ κλειστό εν E): $A = S\cap K$

$$\begin{aligned} S-A &= S-(S\cap K) \\ &= S-K \quad \text{(από ιδιότητες συνόλων)} \\ &= S\cap K^c \quad \text{όπου } K^c \text{ ανοιχτό (αφού } K \text{ κλειστό)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow S-A$ ανοιχτό στον υπόχωρο S

$\Rightarrow A$ κλειστό στο S

είναι το συμπλήρωμα του $S-A$